1989

La magnitud infinita en la matemática.

Roberto Hernáez Rubio

1989

En este breve trabajo vamos a dar unas pinceladas de la noción de infinito en matemáticas y de la aparición de números que escapan al imperio unificador de la razón (números transcendentes e imaginarios). Aunque estas magnitudes son construcciones de la mente, veremos lo que tienen de modelo para la aprehensión científica de lo real.

El análisis infinitesimal nació de problemas físicos y geométricos. Así los griegos introdujeron lo infinitamente pequeño cuando consideraron que un círculo difería infinitesimalmente de un polígono que tuviese un gran número de lados iguales (KASNER-NEWMAN, p. 40). También las famosas paradojas de Zenón, el aléata, crearon serios quebraderos de cabeza con la infinitamente posible división de una recta.

Más tarde Fermat estipuló la noción de derivada para calcular, por ejemplo, la velocidad de un objeto cayendo justo t segundos después de haber empezado a caer. Para ello derivaba la expresión de Galileo para la caída de los cuerpos: $d=16.t^2$; $d'= 32.t$

La noción de integral definida nació del problema físico de hallar áreas de figuras limitadas en todo o en parte por curvas (geometría de los indivisibles de Cavalieri). Fueron Leibniz y Newton los que más desarrollaron el cálculo de lo infinitamente pequeño (infinitésimos). Un infinitesimal (*dx*) es para Leibniz una cantidad distinta de cero, pero menor que 1; 0,1; 0,01;..., y cualquier otro número positivo. Ademàs es posible operar con tales infinitesimales como se hace con los números ordinarios. Para Leibniz una derivada no era sino el cocciente entre dos de estos infinitesimales. Sin embargo, Leibniz sostenía que ontológicamente los infinitesimales eran números ficticios o ideales, aunque operativos. Esto nos indica que la noción de lo infinitamente pequeño comenzó ya siendo algo ficticio, totalmente ajeno a la finitud de los real.

Las ideas de Leibniz y Newton sobre lo infinitamente pequeño eran confusas y recibieron bastantes críticas. Fue Berkeley quien arremetió contra las oscuras nociones del análisis. Decía que las *fluxiones* (derivadas) eran incomprensibles. Sobre los infinitesimales Berkeley señalaba que eran "fantasmas de cantidades desaparecidas" (KLINE, p. 175).

Berkeley señalaba que operando con infinitesimales hay un momneto en que el resultado de la operación no se puede saber si es infinitesimal o no. Por ejemplo, si *dx* es infinitesimal, sin duda *2.dx*, *3.dx* son también infinitesimales, pero para *n.dx*, si n es lo suficientemente grande quizás ya el producto no lo sea. En este hecho consiste la llamada propiedad arquimedeana de los números reales. El cálculo de infinitésimos de Abraham Robinson responde precisamente a esta objeción.

> En el siglo XVIII estaba el análisis en un atolladero. A instancias de Lagrange, la Academia de ciencias de Berlín propuso un concurso para la solución al problema del infinito en matemáticas. Pondré a continuación el texto de la convocatoria por el interés que tiene para el tema que estamos tratando:
>
> La utilidad de la matemática, la estima en que es tenida, y el honorable nombre de ciencia exacta por excelencia que se le da con justicia son debidos a la claridad de sus principios, al rigor de sus demostraciones y la precisión de sus teoremas.
>
> Para asegurar la perpetuación de estas valiosas cualidades en esta elegante parcela del conocimiento se necesita una clara y precisa teoría de lo que se llama el infinito en matemáticas.
>
> Es de todos conocido que la geometría avanzada emplea regularmente el infinitamente grande y el infinitamente pequeño. Sin embargo, los geómetras de la antigüedad e incluso los antiguos analistas se esforzaban por cualquier aproximación al infinito, mientras que cierto eminentes analistas modernos admiten que la expresión *magnitud infinita* es una contradicción en sus términos.
>
> La Academia desea, por tanto, una explicación de cómo es que tantos teoremas correctos han sido deducidos de una suposición contradcitoria, junto con el enunciado de un principio seguro, claro, en resumen, verdaderamente matemático, que pueda sustituir debidamente a la de infinito sin hacer, no obstante, que las investigaciones realizadas

> por medio de él sean extremadamente difíciles o largas. Se requiere que el tema sea tratado con toda la generalidad posible y con todo el rigor, claridad y sencillez posibles. (KLINE, págs. 179-180)

El concurso lo ganó el trabajo titulado El infinito es el abismo en el que se hunden nuestros pensamientos, del suizo Simon L'Huillier, quien poco hizo más que mejorar algo la teoría de límites.

La noción de infinito se ha aclarado algo sólo con la dilucidación misma de la noción de número. El número puede ser definido en virtud de clases. Un número será el conjunto de clases que posean la misma cardinalidad y cuyos elementos son biunívocamente emparejables (KASNER-NEWMAN, pág. 31). El concepto de infinito matemático surge, podríamos decir, cuando tratamos de medir nuestro conjunto de medida: los números naturales.

Así, Cantor, mediante la definición de cardinalidad por clases, estableció una aritmética de lo infinitamente grande. Demostró que una clase infinita (*verbigracia*, la de los números naturales) tiene la singular propiedad de que el todo no es mayor que alguna de sus partes (*verbigracia*, la de los números pares, la cual es también una clase infinita). Ambos conjuntos poseen la misma cardinalidad, lo cual se prueba en que pueden ser emparejados biunívocamente *ad infinitum*:

$$\begin{aligned}
1 &\leftrightarrow 2\\
2 &\leftrightarrow 4\\
3 &\leftrightarrow 6\\
4 &\leftrightarrow 8\\
5 &\leftrightarrow 10\\
6 &\leftrightarrow 12\\
7 &\leftrightarrow 14\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Cantor define la cardinalidad de esos dos conjuntos con un número nuevo e infinito: $\aleph_0$ (aleph sub cero). Según Cantor $\aleph_0$ es el primero de los números transfinitos. A la pregunta de cuántos números naturales hay sería ambiguo decir que infinitos. Hay exactamente $\aleph_0$ números naturales. Así se puede operar con $\aleph_0$ como con cualquier otro número:

$$\aleph_0 + n = \aleph_0$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 . n = \aleph_0$$
$$(\aleph_0)^n = \aleph_0$$

Pero Cantor descubrió transfinitos mayores que $\aleph_0$, es decir, clases de números con los que no era posible establecer una relación biunívoca con los números naturales. Eran clases no numerables. Por ejemplo la clase de los números reales (racionales + irracionales), que incluye los números transcendentales. Esta clase es mayor que la de los números naturales, es decir, su cardinalidad es mayor que $\aleph_0$.

Cantor demostró la no numerabilidad de los reales, demostrando que era imposible emparejar los números entre 0 y 1 con los naturales. Elaboró una ordenación de los reales en forma decimal y los emparejó con los números naturales. Mediante el método diagonal vio que se podía encontrar enseguida un decimal omitido en la escrupulosa ordenación de los decimales, y que era bien distinto de ellos. Con todo esto se demuestra que hay conjuntos infinitos y no numerables. La cardinalidad de los números reales es, según Cantor, la llamada *potencia del continuo* (C).

$$C + \aleph_0 = C$$

$$C . \aleph_0 = C$$

$$C . C = C$$

Cantor estableció que $(\aleph_0)^{\aleph_0} = C$. Los números reales sirven de patrón de medida de las clases con cardinalidad C. De este modo, aparentemente tan sencillo, se crea una aritmética de lo infinitamente grande en la que cantidades ideales -pues incluso la suma de protones del universo entero es menor que $\aleph_0$- son posibles de dominar mediante la razón matemática.

Se resuelven asimismo las famosas paradojas de Zenón. Por ejemplo, una línea pequeñísima tiene tantos puntos como otra de muchos kilómetros ya que se puede establecer una correspondencia biyectiva entre ambas. Aquiles puede andar mucho más lejos que la tortuga sin tocar, sucesivamente, más puntos. (KASNER-NEWMAN, págs. 59-60).

Antes de hacer una aproximación a lo infinitamente pequeño según Abrahan Robinson, conviene detenerse un momento en números reales cuyos decimales constituyen una seria infinita; son números que no satisfacen a ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. Son los números transcendentales. Lindemann demostró de 1882 que π es un número transcendental. π puede ser determinado por series infinitas, como por ejemplo, la que ofreció Leibniz:

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + ...$$

π es un número finito expresable con exactitud únicamente como la suma o el producto de una serie infinita de números diferentes. Lo mismo ocurre con el número *e*, también transcendente, que sólo puede determinarse mediante una serie infinita de numeros, por ejemplo, a partir del desarrollo de $(1 + 1/n)^n$ cuando n tiende a infinito. Es de destacar que *e* no sólo es importante en la pura matemática, sino también en ciencia aplicada, especialmente en economía y teoría de probabilidades. Tiene, podríamos decir, un valor ontológico-dinámico, pues por ejemplo, la función $y = e^x$ permite describir matemáticamente la razón de las cosas que cambian y crecen. Aunque sólo tenemos aproximaciones a los números π y *e* mediante series infinitas, sin embargo, hay fórmulas en las que se puede determinar con exactitud su proporción. Es el caso de la elegante fórmula de De Moivre: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

El hecho de determinar números finitos -ejemplo de π y e- mediante series infinitas de números es algo que Abraham Robinson aplica a su cálculo como base fundamental del mismo. Así, todos los números reales se pueden reducir a sucesiones convergentes de números racionales. Por ejemplo, las sucesiones dadas por $\frac{n}{n+1}$ y $\frac{n+1}{n}$ cuando n tiende a infinito son dos sucesiones diferentes que expresan un mismo número, a saber, el 1.

Robinson establece el conjunto de números hiperreales *R, donde un número hiperreal o no estándar es una clase de equivalencia de sucesiones de números reales, no racionales. Todos los números, reales e hiperreales, pueden ser definidos en forma hiperreal. Así $\pi=< \pi, \pi, \pi, \pi,....>$. El conjunto de los números reales se divide en dos categorías: los estándar (llamados por Robinson reales) y los no estándar (llamados hiperreales). Todo número estándar está rodeado de un halo formado por los números infinitamente próximos a él, sin que pueda haber dos números estándar dentro del mismo halo. Estos números sólo son discernibles mediante el análisis no estándar de Robinson. Los números infinitesimales o los reales estándar se toman como conjuntos externos dentro del análisis no estándar. La aplicación ontológica del cálculo robinsoniano supone poder descubrir la presencia de fenómenos intermedios allí donde antes se observaba una discontinuidad, un salto brusco. Y viceversa: también permite el estudio matemático de estructuras irregulares de tipo fractal. (DIENER, pág. 282). De este modo el ámbito de lo infinitamente grande (Cantor) y el de lo infinitamente pequeño (Robinson) quedan bajo el imperio de la razón matemática que durante muchos siglos los había arrumbado por creer que lo infinito no puede ser pensado con rigor por nuestra mente finita.

BIBLIOGRAFÍA

* KLINE, Morris, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Siglo, XXI, 1985.

* KASNER, E. - NEWMAN, J, *Matemáticas e imaginación*. Biblioteca Científica Salvat, 1987.

* HARTHONG, Jacques, “El análisis no estándar”, Revista *Mundo Científico*, 31, diciembre 1983.

* DIENER, Faranciane - DIENER, Marc, “Las aplicaciones del análisis no estándar”, *Mundo Científico*, nº 89.